

Note que se $m_1 = m_2 = m$

$$\theta = \sin^{-1} \left\{ \frac{m \sin(2\phi)}{m [4 - 4 \cos^2(\phi)]^{1/2}} \right\}$$

$$\theta = \sin^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2\phi)}{(1 - \cos^2(\phi))^{1/2}} \right\} = \sin^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\sin(2\phi)}{\sin(\phi)} \right\}$$

$$\theta = \sin^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{2 \sin(\phi) \cos(\phi)}{\sin(\phi)} \right\}$$

$$\Rightarrow \sin(\theta) = \cos(\phi)$$

exemplos:

ϕ	θ
10°	80°
15°	75°
20°	70°

$$\sin(\alpha + 90) = \sin(\alpha) \cos(90) + \sin(90) \cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha + 90) = \cos(\alpha) \quad (1)$$

como $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

outra possibilidade é $\sin(\alpha + 90) = \cos(-\alpha) \quad (2)$

$\Rightarrow$ de (1) se $\phi = \alpha$

$\Rightarrow \theta = \alpha + 90$

$$\phi - \theta = -90$$

$$\theta = \phi + 90 \quad (*1)$$

de (2) se $\phi = -\alpha$

$$\theta = \alpha + 90$$

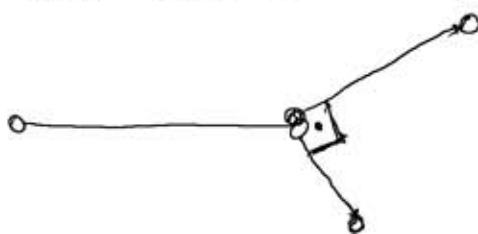
somando $\phi + \theta = 90^\circ$

$$\theta = 90 - \phi \quad (*2)$$

(*1) não representa uma condição aceitável fisicamente.

" $\phi = 0^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ$ " uma desura e outra não?

$$\Rightarrow \theta + \phi = 90^\circ$$



Nas páginas (2) e (3) desenvolvemos o conceito de conservação considerando um sistema isolado de forças externas.

Nos perguntemos agora o que acontece quando existe a ação de forças externas.

Esta pergunta, se devidamente respondida, nos levará aos conceitos de trabalho e impulso.

IMPULSO

Se existe força externa:

$$\sum_m \vec{F}_m \neq \vec{0} \quad \text{e é igual a} \quad \sum_m m_m \vec{a}_m$$

$$\Rightarrow \sum_m \vec{F}_m = \vec{F}_{\text{ext, resultante}} \equiv \vec{F}_R$$

$$\Rightarrow \vec{F}_R = \sum_m m_m \vec{a}_m$$

$$\vec{F}_R = \sum_m m_m \frac{d\vec{v}_m}{dt}$$

$$\vec{F}_R \cdot dt = \sum_m m_m d\vec{v}_m$$

$$\int \vec{F}_R \cdot dt = \sum_m m_m \int d\vec{v}_m = \sum_m m_m \Delta \vec{v}_m$$

$$\int \vec{F}_R \cdot dt = \sum_m m_m (\vec{v}_{m_f} - \vec{v}_{m_i})$$

$$= \sum_m m_m \vec{v}_{m_f} - \sum_m m_m \vec{v}_{m_i}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\quad} M \cdot \vec{v}_{\text{cm, inicial}} \equiv M \vec{v}_i \\ & \xrightarrow{\quad} M \cdot \vec{v}_{\text{cm, final}} \equiv M \vec{v}_f \end{aligned}$$

$M = \text{massa total do sistema.}$

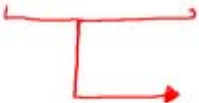
$$\Rightarrow \int \vec{F}_R \cdot dt = M \vec{v}_f - M \vec{v}_i = M \Delta \vec{v}$$

$\int \vec{F}_R \cdot dt$ é definido como Impulso $\vec{I} \Rightarrow$

$$\vec{I} = \Delta \vec{p}$$

Procedendo de forma análoga à realizada na página anterior, mas realizando o produto escalar da força externa com deslocamentos ao invés do tempo, temos que

$$\vec{F}_R = \sum_m m_m \vec{a}_m$$


 Isso dá a massa total vezes a aceleração do centro de massa $(M \cdot \vec{a}_{cm})$

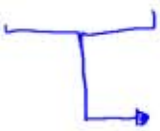
$$\Rightarrow \vec{F}_R = M \cdot \vec{a}_{cm} = M \cdot \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

Fazendo o produto escalar com um deslocamento infinitesimal temos:

$$\vec{F}_R \cdot d\vec{r}_{cm} = M \cdot \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} \cdot d\vec{r}_{cm} = M \cdot d\vec{v}_{cm} \cdot \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = M d\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_{cm}$$

$$\vec{F}_R \cdot d\vec{r}_{cm} = M (dv_x \cdot v_x + dv_y \cdot v_y + dv_z \cdot v_z)_{cm}$$

$$\int \vec{F}_R \cdot d\vec{r}_{cm} = M \left(\int v_x dv_x + \int v_y dv_y + \int v_z dv_z \right)_{cm}$$


 A integral de forças vezes distância (produto escalar, ou seja, integral da componente da força na direção do deslocamento, vezes o deslocamento) -- é definido como trabalho realizado pela força externa W .

$$W = M \left(\frac{v_x^2}{2} \Big|_{v_{x0}}^{v_{xf}} + \frac{v_y^2}{2} \Big|_{v_{y0}}^{v_{yf}} + \frac{v_z^2}{2} \Big|_{v_{z0}}^{v_{zf}} \right)_{cm}$$

$$W = \frac{M}{2} \left([v_{xf}^2 - v_{xi}^2] + [v_{yf}^2 - v_{yi}^2] + [v_{zf}^2 - v_{zi}^2] \right)$$

$$W = \frac{M}{2} \left([v_{xf}^2 + v_{yf}^2 + v_{zf}^2] - [v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2] \right)$$

$$W = \frac{M}{2} (v_f^2 - v_i^2)$$

$$W = \frac{M v_f^2}{2} - \frac{M v_i^2}{2}$$

Então o trabalho realizado pela força externa equivale à variação da energia cinética do sistema.

$$\int \vec{F}_x \cdot d\vec{r}_{cm} = W_{\text{externo}} = \frac{1}{2} M v_{f,cm}^2 - \frac{1}{2} M v_{i,cm}^2$$

Note que o problema de considerarmos uma força externa agindo em um sistema de partículas pode ser tratado como se a força externa agisse em uma única partícula de massa M dada pela massa total do sistema promovendo variação na velocidade (ao quadrado) do centro de massa do sistema de partícula.

— 11 —

POTÊNCIA

Vimos que uma força agindo sobre um objeto de massa M , por uma distância $d\vec{r}$ equivale ao que definimos como trabalho realizado pela força e isso leva o objeto desde uma energia cinética inicial até uma energia cinética final.

Vamos, como exemplo, supor que a energia cinética inicial é de 10 Joules e que a final é de 23 Joules. Podemos nos perguntar:

Quanto tempo a força levou para produzir esta variação de 13 joules?

É de se esperar que uma força pequena leve mais tempo que uma força superior para produzir a mesma variação. Com esta diferença em mente, define-se que a força capaz de produzir uma mesma variação de energia cinética é mais potente se o fizer em um tempo menor. Sendo assim, define-se potência por

$$P = \frac{dW}{dt}$$

"note que esta definição equivale a dizermos:

Potência é a velocidade com a qual o trabalho é realizado"

A expressão acima está com a notação infinitesimal, que representa o caso mais geral onde a força pode variar no tempo e, portanto, a potência também, ou seja

$P \rightarrow P(t)$, logo, P é a potência instantânea.

É comum trabalhar-se com a potência média P_m .

Neste caso não nos interessa os valores intermediários da potência, só o seu valor médio, sendo assim

$$P_m \equiv \frac{W}{\Delta t}.$$

Problemas

Problema 15 - Halliday 7ª Edição - CAP 7.

Uma força de 12 N com uma orientação fixada realiza trabalho sobre uma partícula que se move através de um deslocamento $\vec{d} = (2,00\hat{i} - 4,00\hat{j} + 3,00\hat{k})\text{ m}$. Qual é o ângulo entre a força e o deslocamento se a variação na energia cinética da partícula é

(a) $+30,0\text{ J}$

(b) $-30,0\text{ J}$?

Solução:

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = W$$

$$\Rightarrow \int F dr \cos(\theta) = W$$

Como $\vec{F} = \text{cte}$ e $\vec{d}$ é uma reta fixa $\Rightarrow \theta$ é constante.

$$\Rightarrow F \cos(\theta) \int dr = W$$

$$F \cos(\theta) \Delta r = W$$

$$\Rightarrow \Delta r = d = \sqrt{(2,00)^2 + (-4,00)^2 + (3,00)^2} = 5,38$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{W}{F \cdot d} \right)$$

(a) $\Rightarrow \theta = 62,3^\circ$

(b) $\theta = 118^\circ$

$W > 0$

$\vec{F}$
 $62,3^\circ$

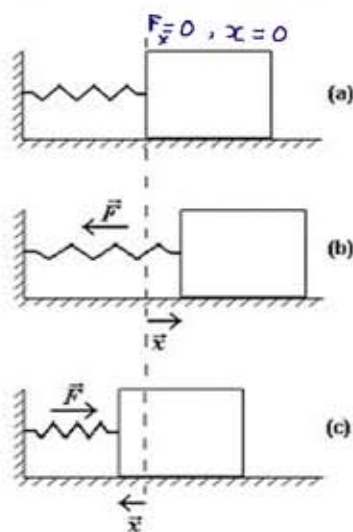
d

$W < 0$

118°

d

Na Fig. abaixo, devemos aplicar uma força de módulo 80N para manter um bloco em repouso em $x = -2,0\text{cm}$. A partir dessa posição, deslocamos o bloco lentamente de modo que nossa força realiza um trabalho de $+4,0\text{J}$ sobre o sistema massa-mola; a partir daí, mantemos o bloco em repouso novamente. Qual é a posição do bloco? (Dica: Há duas respostas).



Antes de resolvermos o problema vamos fazer uma análise mais geral sobre o sistema massa-mola como acima.

Note que a mola (pertencente ao sistema) produz uma força negativa quando x é positivo; e produz uma força positiva quando x é negativo. Esse fato faz com que o bloco seja sempre forçado à voltar para a posição $x=0$.

Como vimos teoricamente, se não existir perda de energia (sem atrito), ocorre que a energia do sistema deve ser conservada. Neste caso a energia cinética está variando pois a velocidade do bloco assume valores desde zero (nas extremidades) até um valor máximo. Bom, se a energia cinética está variando e, ao mesmo tempo, o sistema está isolado (massa-mola) para onde a energia cinética está sendo mandada (quando o bloco tem velocidade zero a energia cinética é zero) e de onde esta mesma energia está sendo recuperada (quando o bloco passa pelo centro ele tem velocidade diferente de zero, portanto, recuperando a velocidade e a energia cinética)?

?

⇒ Para deslocamentos pequenos a força que a mola exerce sobre o bloco é proporcional ao negativo da distância que o blo está do ponto de equilíbrio ($\equiv x=0$).

$$\Rightarrow \vec{F} = -kx\hat{i}$$

Como estamos analisando em uma dimensão $\Rightarrow F = -kx$ é suficiente (não vetorial).

Vamos imaginar que exista só a mola e então alguma força externa F_{ex} emburre a mola desde $x=0$ até um ponto x_a qualquer.

Neste caso, "alguém" de fora está trabalhando (fazendo força através de uma distância) e, fazendo com que a mola fique tensionada, prestes e prestes (se solta) a voltar para seu lugar de equilíbrio ($x=0$). Dizemos então que a mola está energizada. Que energia é essa que ficou armazenada na mola?

vejamos:



Se a força externa é aplicada de forma que o movimento seja bem lento (sem aceleração) então, se não tem aceleração a somatória das forças deve ser nula (força externa mais reação da mola se anulam).

$$\vec{F}_{ext} + \vec{F}_{mola} = 0$$

$$F_{ext} + (-)kx = 0$$

$$F_{ext} = kx$$

Vamos então obter o trabalho realizado pela força externa.

$$W_{ext} = \int_0^{x_a} F_{ext} \cdot dx$$

$$W_{ext} = \frac{kx^2}{2} \Big|_0^{x_a}$$

$$W_{ext} = \frac{kx_a^2}{2}$$

Portanto, o trabalho que a força externa realiza sobre a mola é sempre positivo independentemente se x_a é positivo ou negativo.

Isto é esperado pois independentemente do sentido para onde se empurra a mola ela sempre fica energizada (com tendência de produzir movimento, ou seja, com tendência de produzir energia cinética).

Note que se a força externa aumenta a energia da mola, então aquele que está fazendo a força externa deve perder essa mesma quantidade de energia. Exemplo: se for uma pessoa empurrando, esta pessoa perde calorias (uma caloria = 4,18 Joules) para fazer este trabalho; esta energia fica armazenada na mola (por isso as pessoas lavantam peso na academia). Note, portanto, que se o trabalho que a força externa faz sobre a mola é positivo (aumento de energia da mola) então o trabalho que a força da mola faz sobre o agente externo deve ser negativo (diminuindo a quantidade de energia do agente externo).

Vamos fazer um cálculo a fim de verificarmos esta afirmação.

Olhando do ponto de vista do agente externo, a força que age sobre ele é a força da mola que é

$$F_m = -kx$$

Vamos então nos perguntar qual é o trabalho que a força da mola faz sobre o agente externo.

$$W_m = \int_0^{x_a} F_m dx$$

$$W_m = \int_0^{x_a} -kx dx = -\frac{kx_a^2}{2}$$

Como esperado, o trabalho que a força da mola faz sobre o agente externo é sempre negativo, ou seja, sempre "roubando" energia do agente externo

OBS: Importante. Esta conclusão só é válida para o caso específico exemplificado acima. Que o agente externo leva a mola de sua posição de equilíbrio até uma posição x_a qualquer.

Vamos inverter a situação colocada acima. Vamos supor agora que inicialmente a mola está tensionada pela força externa em uma posição x_a . Então que o movimento lento leve a mola para sua posição de equilíbrio.

Nos perguntemos:

- (a) Qual foi o trabalho realizado pela força externa sobre a mola ?
 (b) Qual foi o trabalho realizado pela força da mola sobre o corpo externo ?

$$(a) F_{ext} = kx$$

$$W_{ext} = \int_{x_a}^0 kx dx = \left. \frac{kx^2}{2} \right|_{x_a}^0$$

$$W_{ext} = \frac{k}{2} (0^2 - x_a^2) = -\frac{kx_a^2}{2}$$

Portanto, neste caso, o trabalho realizado pela força externa sobre a mola é negativo. Isso significa que a força externa age de forma a retirar a energia da mola, a desenergizá-la. É claro, afinal, a mola está sendo levada para sua posição de equilíbrio.

$$(b) F_m = -kx$$

$$W_m = \int_{x_a}^0 \frac{-kx^2}{2} dx = -\frac{k}{2} \left[0^2 - x_a^2 \right] = \frac{kx_a^2}{2}$$

Portanto, o trabalho realizado pela força da mola sobre o corpo externo é positivo. Observe que apesar de os sinais serem contrários ao caso analisado anteriormente os módulos são os mesmos. Isto significa que a energia armazenada na mola durante o tensionamento é devolvida para o agente externo durante o relaxamento. (isto representa o fato de que a energia do sistema mola mais o agente externo deve ser conservada).

Podemos concluir então que a energia elástica armazenada na mola é

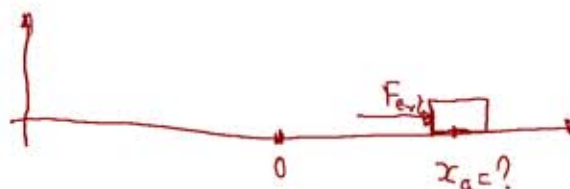
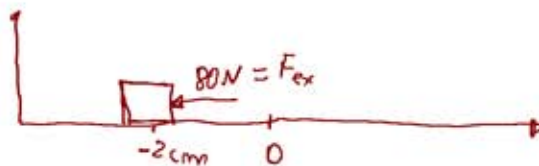
$$E_m = \frac{1}{2} kx^2$$

e é igual ao trabalho realizado pela força externa sobre a mola.

De posse destas informações podemos resolver o problema posto anteriormente (25-Cap. 7 - Halliday - 7ª edição).

SOLUÇÃO:

(a)



Como vimos

$$F_{\text{ext}} = Kx$$

"Reação à mola, se o movimento é lento"

$$\int_{x_0}^{x_a} Kx dx = 4J \quad \text{"Colocar em metros"}$$

$$\left. \frac{Kx^2}{2} \right|_{x_0}^{x_a} = 4J$$

$$\frac{K}{2} (x_a^2 - x_0^2) = 4J$$

$$\frac{Kx_a^2}{2} = 4 + \frac{Kx_0^2}{2}$$

$$x_a = \pm \sqrt{\frac{8}{K} + x_0^2} \quad \text{sendo que } x_0 = -2,0 \times 10^{-2} \text{ m}$$

Para obter x_a precisamos conhecer o valor de K .

O problema disse que:

$$F_{\text{ext}}(x_0) = 80N, \text{ em módulo}$$

$$\text{Mas } F_{\text{ext}} = Kx$$

$$\Rightarrow F_{\text{ext}} = -K \cdot 0,020 \text{ m}, \text{ como } x_0 < 0 \text{ então,}$$

$$F_{\text{ext}} = -80N$$

$$-80 = -K \cdot 0,020$$

$$K = \frac{80}{0,020} = 4000 \text{ N/m}$$

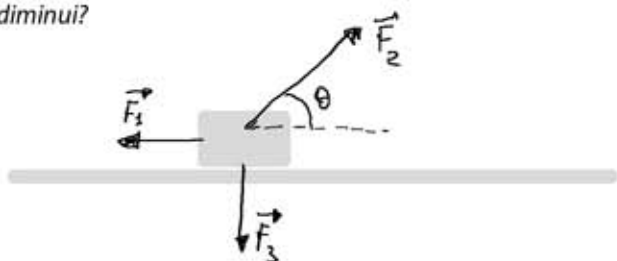
$$\text{Portanto, } x_a = \pm \sqrt{\frac{8}{4000} + 0,020^2}$$

$$x_a = +4,9 \text{ cm}$$

ou

$$x_a = -4,9 \text{ cm}$$

A Fig. abaixo mostra três forças aplicadas a um baú que se move para a esquerda por 3,00 m sobre um piso sem atrito. Os módulos das forças são $F_1 = 5,00 \text{ N}$, $F_2 = 9,00 \text{ N}$ e $F_3 = 10,0 \text{ N}$, e o ângulo indicado é $\theta = 60^\circ$. Neste deslocamento, (a) qual é o trabalho resultante realizado sobre o baú pelas três forças e (b) a energia cinética do baú aumenta ou diminui?



Solução:

O trabalho realizado pelas forças externas é dado por

$$W_{\text{ext}} = \int_{x_0}^{x_f} \vec{F}_{\text{ext}} \cdot d\vec{r} \quad \vec{F}_{\text{ext}} = (-F_1 + F_2 \cos(\theta)) \hat{i} + (F_2 \sin(\theta) - F_3) \hat{j}$$

$$d\vec{r} = dx \hat{i}$$

$$W_{\text{ext}} = \int_{x_0}^{x_f} [(-F_1 + F_2 \cos(\theta)) \hat{i} + (F_2 \sin(\theta) - F_3) \hat{j}] \cdot [dx \hat{i}]$$

$$W_{\text{ext}} = \int_{x_0}^{x_f} (-F_1 + F_2 \cos(\theta)) \cdot dx \underbrace{\hat{i} \cdot \hat{i}}_1 + \int_{x_0}^{x_f} (F_2 \sin(\theta) - F_3) \cdot dx \underbrace{\hat{j} \cdot \hat{i}}_{\text{zero}}$$

Zero

"Força perpendicular ao movimento não realiza trabalho".

$$W_{\text{ext}} = \int_{x_0}^{x_f} -F_1 dx + \int_{x_0}^{x_f} F_2 \cos(\theta) dx$$

$$W_{\text{ext}} = -F_1 (x_f - x_0) + F_2 \cos(\theta) (x_f - x_0)$$

$5,00 \text{ N}$ $-3,00 \text{ m}$ $9,00 \text{ N}$ 60° $-3,00 \text{ m}$

$$W_{\text{ext}} = + 1,5 \text{ J}$$

Obs: $(x_f - x_0) = -3,00 \text{ m}$ pq se move para a esquerda

(b)

A energia cinética é comumente representada pela letra K

$$\rightarrow K = \frac{1}{2} m v^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_o^2$$

Vimos que o trabalho realizado pela força externa é igual à variação da energia cinética do sistema submetida à força.

$$\rightarrow \int \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r} = \Delta K$$

$$\rightarrow \Delta K = + 1,5 J$$

Portanto, como a variação da energia cinética é positiva, ela aumenta.

Significa que o módulo da velocidade aumenta, mesmo indo no sentido negativo do eixo x . Retrata o fato de que a força resultante ocorre no mesmo sentido do deslocamento.